Surname, First name

1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9
0	0	0	0	0	0	0

Physique Générale : mécanique (PHYS-101(e))
Examen du 17 janvier 2025 - 9h15-12h45

Veuillez rédiger vos réponses dans le cahier de réponses ci-joint.

Le cahier ne doit pas être dégrafé. Seul le cahier est ramassé et corrigé.

Dans tous les exercices, sauf indication contraire, les résultats sont à exprimer en fonction des données fournies et des constantes physiques connues.

Chaque réponse doit être justifiée dans le cadre prévu à cet effet (une page blanche supplémentaire est disponible à la fin de chaque exercice si nécessaire).

Le sujet de l'examen comprend 4 exercices.

Seul document autorisé : une feuille de notes manuscrites A4 recto/verso. Pas de calculatrice ni de téléphone.

Formulaire :

Coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

Coordonnées sphériques

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\vec{e}_\theta + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi$$

Exercice 1 (0,9 point) : Lancer sur plateforme mouvante

1a Donnez l'expression de la distance L en fonction de ΔK,

• Énergie cinétique : $\Delta K = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M \cdot 0^2 \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta K}{m}}$

• Newton : $\vec{e}_x$: $a_x = 0$, $v_x = cte = v_m$, $L = v_m t$

$\vec{e}_z$: $a_z = -g$, $v_z = -gt$, $h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$$\Rightarrow L = v_m \cdot t = \sqrt{\frac{2 \Delta K}{m}} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \boxed{2\sqrt{\frac{\Delta K \cdot h}{mg}}}$$

1b Calculez la vitesse v_1 de la plateforme par rapport au sol.

choc mou, la quantité de mouvement est conservée

$\vec{e}_x$: $m v_m = (m+M) v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{m}{m+M} v_m = \frac{m}{m+M} \cdot \sqrt{\frac{2 \Delta K}{m}}$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2 m \Delta K}}{m+M}}$$

1c Calculez la vitesse v_2 de la plateforme en fonction de ΔK.

- Énergie cinétique : $\Delta K = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M \cdot v_2^2$
- Conservation de la quantité de mouvement : $\vec{0} = m\vec{v}_m + M\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_m = \frac{M}{m}\vec{v}_2$

$$\Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2} m \frac{M^2}{m^2} v_2^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{M(M+m)}{2m} v_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2m\Delta K}{M(M+m)}}}$$

1d Quelle est la vitesse finale v_3 de la plateforme par rapport au sol après le choc mou ?

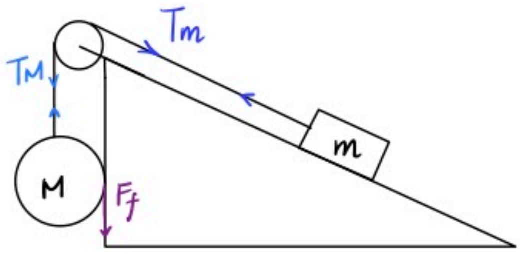
Conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{0} = (M+m)\vec{v}_3 \Rightarrow \boxed{v_3 = 0}$$

Espace supplémentaire - Exercice 1

Exercice 2 (1,6 points) : Bloc, roue, et poulie

2a Le bloc descend la pente (sans frottement). Calculez l'accélération α.



- Newton, projection selon le câble
  - bloc : $ma = mg\sin\alpha - T_m$ ①
  - roue : $Ma = T_M - Mg - F_f$ ②
- Roulement sans glissement :
  - poulie : $\dot{\omega}_P = a/r$ ③ — roue : $\dot{\omega}_M = a/R$ ④
- Théorème du moment cinétique :
  - poulie : $r(T_m - T_M) = I_P \cdot \dot{\omega}_P \overset{③}{=} I_P \cdot a/r$ ⑤
  - roue : $R \cdot F_f = I_R \cdot \dot{\omega}_M \overset{④}{=} I_R \cdot a/R$ ⑥

① : $T_m = mg\sin\alpha - ma$ ② : $T_M = Ma + Mg + F_f$ ⑥ : $F_f = \frac{I_R}{R^2} \cdot a$

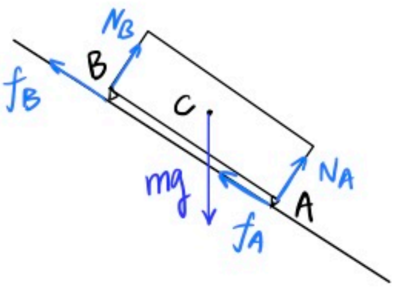
$\Rightarrow$ ⑤ : $mg\sin\alpha - ma - Ma - Mg - \frac{I_R}{R^2}a = \frac{I_P}{r^2}a$

$$mg\sin\alpha - Mg = \left(m + M + \frac{I_R}{R^2} + \frac{I_P}{r^2}\right)a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{mg\sin\alpha - Mg}{m + M + I_R/R^2 + I_P/r^2}}$$

2b Calculez l'accélération a du bloc en tenant compte des forces de frottement sec en *A* et en *B*.

Newton + projection:



$\vec{e}_x$: $ma = mg\sin\alpha - f_A - f_B$

$\vec{e}_y$: $0 = N_A + N_B - mg\cos\alpha$

avec : $f_A = \mu_c \cdot N_A$, $f_B = \mu_c \cdot N_B$

$\Rightarrow \quad ma = mg\sin\alpha - \mu_c (N_A + N_B) = mg\sin\alpha - \mu_c mg\cos\alpha$

$\Rightarrow \quad a = \boxed{g\sin\alpha - \mu_c g\cos\alpha}$

2c Donnez l'expression de la force de réaction N_B s'exerçant sur le point *B* pendant le mouvement.

Théorème du moment cinétique au C :

$$I_C \cdot \dot{\vec{\omega}}_C = \vec{CA} \times (\vec{f}_A + \vec{N}_A) + \vec{CB} \times (\vec{f}_B + \vec{N}_B)$$

$$\overset{\shortparallel}{\vec{0}} \quad = (l\vec{e}_x - h\vec{e}_y) \times (-\mu_c N_A \vec{e}_x + N_A \vec{e}_y)$$

(ne tourne pas)

$$+ (-l\vec{e}_x - h\vec{e}_y) \times (-\mu_c N_B \vec{e}_x + N_B \vec{e}_y)$$

$$= (l N_A - h\mu_c N_A - l N_B - h\mu_c N_B)\vec{e}_z$$

2b : $N_A + N_B = mg\cos\alpha$

$$\Rightarrow (l - h\mu_c)(mg\cos\alpha - N_B) - (l + h\mu_c)N_B = 0$$

$$(l - h\mu_c)\, mg\cos\alpha = 2l\, N_B$$

$$\Rightarrow N_B = \boxed{\frac{l - h\mu_c}{2l}\, mg\cos\alpha}$$

2d Quelle est la condition sur le rapport $\frac{l}{h}$ pour que le point *B* ne décolle pas du plan incliné ?

Condition « ne décolle pas » : $N_B \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{l - h\mu_c}{2l} mg\sin\alpha \geq 0 \Rightarrow l - h\mu_c \geq 0 \Rightarrow \boxed{l/h \geq \mu_c}$$

Espace supplémentaire - Exercice 2

Exercice 3 (1,5 points) : Le manège et l'enfant

3a Calculez le moment d'inertie I_{tot} pour le système « disque + enfant»

$$I_{tot} = I_{disque} + I_{enfant}$$

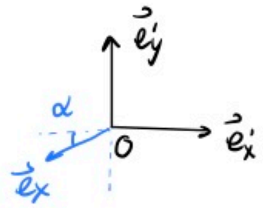
$$= \boxed{\frac{1}{2}MR^2 + m\cdot R^2}$$

3b Démontrez la relation $h = R\,(1 - \cos\varphi)\,\sin\alpha$

· Dans le ref du manège $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$:

$\vec{OM_i} = R\vec{e_x}$ $\qquad$ $\vec{OM_f} = R\cos\varphi\,\vec{e_x} + R\cdot\sin\varphi\,\vec{e_y}$

initiale $\qquad$ finale



· Dans le ref du sol, plan de $\vec{e_x}$ $(O, \vec{e_x'}, \vec{e_y'}, \vec{e_z'})$:

$\vec{e_x} = -\cos\alpha\,\vec{e_x'} - \sin\alpha\,\vec{e_y'}$ $\qquad$ $\vec{e_y} \perp \vec{e_y'}$

$$h = (\vec{OM_f} - \vec{OM_i})\cdot\vec{e_y'} = \left[R(\cos\varphi - 1)\,\vec{e_x} + \underbrace{R\sin\varphi\,\vec{e_y}\,]\cdot\vec{e_y'}}_{0}\right.$$

$$= R(\cos\varphi - 1)(-\cos\alpha\,\vec{e_x'} - \sin\alpha\,\vec{e_y'})\cdot\vec{e_y'}$$

$$= R(1 - \cos\varphi)\sin\alpha$$

CQFD

3c Exprimez l'énergie mécanique du système « disque + enfant »

- Énergie cinétique (rotation) : $E_c = \frac{1}{2} I_{tot} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{tot} \dot{\varphi}^2$
- Énergie potentielle : $E_P = mgh = mgR(1-\cos\varphi)\sin\alpha$

$\Rightarrow \quad E_{m,tot} = \boxed{\frac{1}{2} I_{tot} \dot{\varphi}^2 + mgR(1-\cos\varphi)\sin\alpha}$

3d Calculez l'équation différentielle du mouvement selon φ.

$E_{m,tot}$ est conservée : $\frac{dE_{m,tot}}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} I_{tot}\, 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgR\sin\alpha \sin\varphi\, \dot{\varphi} = 0$

non triviale : $\dot{\varphi} \neq 0$, $\boxed{I_{tot}\ddot{\varphi} + mgR\sin\alpha\sin\varphi = 0}$

ou $\ddot{\varphi} + \frac{2mg\sin\alpha}{(M+2m)R}\sin\varphi = 0$

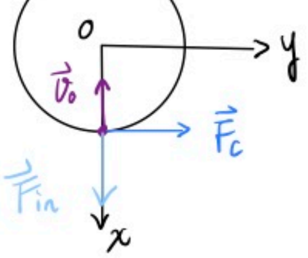
3e Donnez l'expression de la pulsation et la forme générale des solutions de l'éq. diff. du mvt.

φ petit , $\sin\varphi \sim \varphi$ 3d $\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{2mg\sin\alpha}{(M+2m)R}\varphi = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{pulsation : } \omega_0 = \sqrt{\frac{2mg\sin\alpha}{(M+2m)R}} \quad \text{solution générale : } \varphi(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)}$

$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$ (car $\varphi(0) = \varphi_0$, $\underset{\text{sans vitesse}}{\underset{\uparrow}{\varphi'(0) = 0}}$)

3f Indiquez sur un schéma les forces de Coriolis et centrifuge. Calculez la déviation.



Coriolis : $\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_r$

$= -2m\Omega \vec{e}_z \times (-v_0 \vec{e}_x)$

$= 2m\Omega v_0 \vec{e}_y \ /\!/ \ \vec{e}_y$

centrifuge : $\vec{F}_{in} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$

$= -m\Omega\vec{e}_z \times (\Omega \vec{e}_z \times R\vec{e}_x)$

$= -m\Omega\vec{e}_z \times (\Omega R \vec{e}_y)$

$= m\Omega^2 R \vec{e}_x \ /\!/ \ \vec{e}_x$

vitesse constante & deviation faible : $t \approx \frac{2R}{v_0}$

deviation due au Coriolis : $oy = \frac{1}{2} a_c t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\Omega v_0 \cdot \left(\frac{2R}{v_0}\right)^2$

$= \boxed{\frac{4\Omega R^2}{v_0}}$

3g Quelle est alors la vitesse angulaire Ω' lorsque l'enfant est au centre du manège ?

Le moment cinétique est conservé, mais le moment d'inertie change.

$I_{tot} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 \ (x = R) \quad \rightarrow \quad I'_{tot} = \frac{1}{2}MR^2 \ (x = 0)$

$\Rightarrow \mathcal{L} = I_{tot}\Omega = I'_{tot}\Omega' \quad \Rightarrow \Omega' = \frac{I_{tot}}{I'_{tot}}\Omega = \boxed{\frac{M+2m}{M}\Omega}$

Espace supplémentaire - Exercice 3

Exercice 4 (1,0 point) : Retour sur Terre

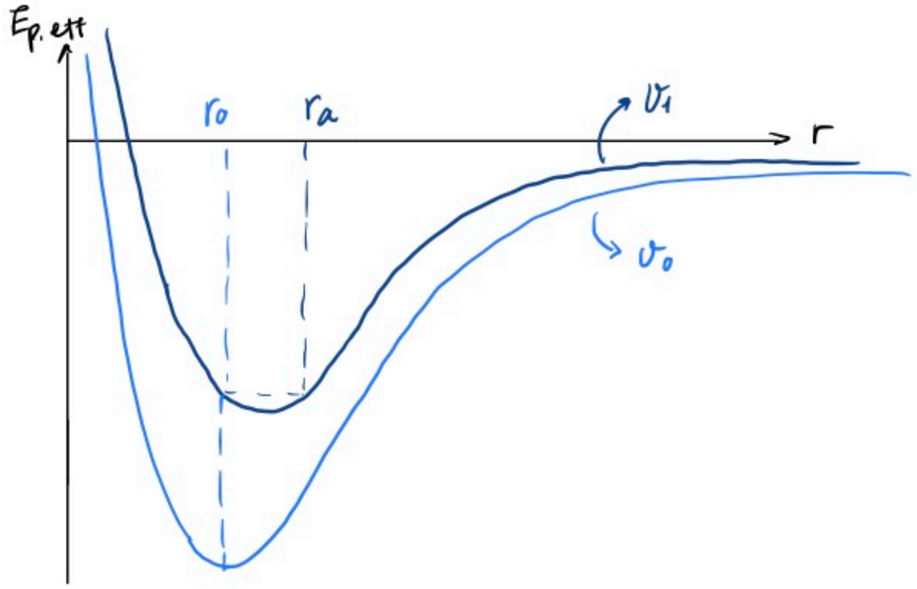
4a Démontrez que la vitesse orbitale s'écrit sous la forme $v_0 = \sqrt{\frac{GM_L}{r_0}}$.

Newton , mouvement circulaire :

$$m \frac{v_0^2}{r_0} = \frac{GM_L m}{r_0^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM_L}{r_0}}$$

CQFD

4b Faites un schéma avec les courbes d'énergie potentielle effective. Vous indiquerez aussi r_0 et r_a.



4c Exprimez r_a .

Conservation du moment cinétique :

$$m \cdot r_0 \cdot v_1 = m\, r_a v_a \quad \Rightarrow \quad r_a = \boxed{\frac{r_0 v_1}{v_a}}$$

4d Calculez Δv.

• conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GM_L m}{r_0} = \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GM_L m}{r_a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{(v_1 - v_a)}(v_1 + v_a) = GM_L \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_a} \right) \qquad r_a = \frac{v_1}{v_a} r_0 \quad (4c)$$

$$= \frac{GM_L \cancel{(v_1 - v_a)}}{r_0 v_1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(v_1 + v_a) = \frac{r_a + r_0}{2 r_a} v_1 = \frac{GM_L}{r_0 v_1} \quad \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2GM_L r_a}{r_0 (r_0 + r_a)}}$$

$$\Rightarrow \Delta v = v_1 - v_0 = \sqrt{\frac{2GM_L r_a}{r_0(r_0 + r_a)}} - \sqrt{\frac{GM_L}{r_0}} = \boxed{\sqrt{\frac{GM_L}{r_0}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2 r_a}{r_0 + r_a}} - 1 \right)}$$

Exercice supplémentaire - Exercice 4